Nom, Prénom : …………………………………………………… **Mardi 24 Janvier 2024**

TSpé DEVOIR SURVEILLE N°5 (2h)

/40

2,5 points de bonus

Les élèves bénéficiant d'un tiers-temps ne traiteront pas les questions précédées d'un @

Exercice 1: *(8 points)*

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Affirmation 1 : L'équation $(3\ln x - 5)(e^x + 4) = 0$ admet exactement deux solutions réelles.

Affirmation 2 : La fonction $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x-2}{4-x}\right)$ est définie sur $]4 ; +\infty[$.

@Affirmation 3 : La dérivée de la fonction f définie à l'affirmation 2 est $f'(x) = \dfrac{10}{(4-x)(3x-2)}$

Affirmation 4 : L'inéquation $\ln(2x-1) + \ln 2 \geq \ln 8$ n'a pas de solution.

Exercice 2: Déterminer les limites suivantes : *(7 points)*

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{5x + 2}$ @2) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 7x - 5}{x - 2}$ 3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x + \sin(x)}{x^2 + 4}$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2xe^x - e^x}{e^{2x} - 3}$ (BONUS) 5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{2x^2}$ (BONUS) 6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$

Exercice 3 : *(15,25 points)*

On donne la fonction f définie sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3\ln(2x-1)$

1) Calculer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.

2) Montrer que $f'(x) = \dfrac{4x^2 - 10x + 10}{2x - 1}$.

3) Etudier les variations de la fonction f sur $]\frac{1}{2} + \infty[$ et dresser le tableau de variations.

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]\frac{1}{2} ; +\infty[$.

5) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

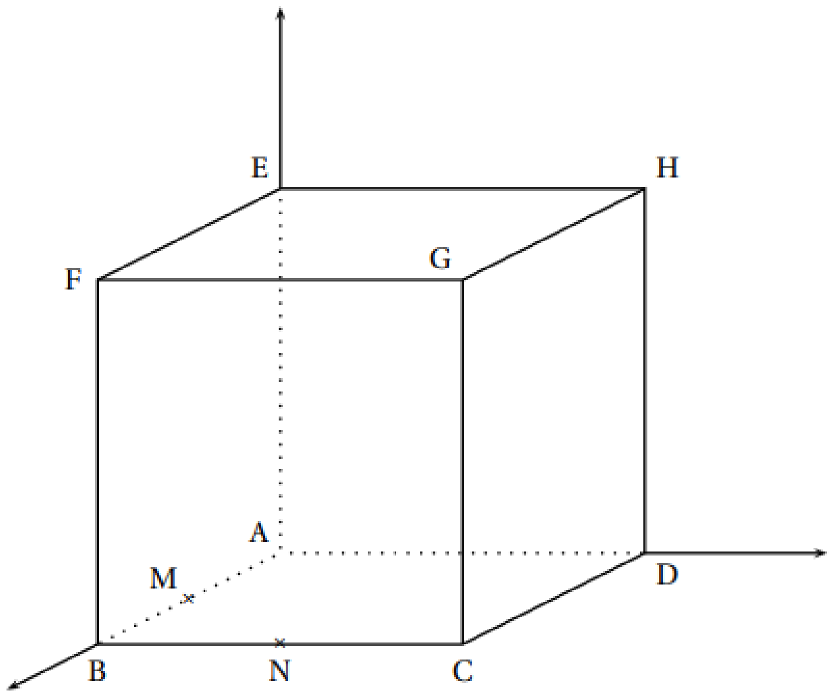
6) En déduire le signe de la fonction f sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$.

7) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

@8) Montrer que $f''(x) = \dfrac{2(4x^2 - 4x - 5)}{(2x-1)^2}$ et étudier la convexité de la fonction f sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$.

Exercice 4: *(9,75 points)*

Dans le cube ABCDEFGH, on a placé les points M et N milieux respectifs des segments [AB] et [BC].



On se place dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE}$).

1) Donner sans justification, les coordonnées des points H, M et N.

2) On admet que les droites (CD) et (MN) sont sécantes et on note K leur point d'intersection.
   a) Donner une représentation paramétrique des droites (MN) et (CD).
   b) Déterminer les coordonnées du point K.

3) On admet que les points H, M et N définissent un plan nommé (HMN) et que la droite (CG) est sécante à ce plan.
   a) Montrer que le point L(1 ; 1 ; $\frac{1}{3}$) appartient à la droite (CG).
   b) Montrer que $\overrightarrow{ML} = \frac{4}{3}\overrightarrow{MN} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MH}$
   c) Que peut-on en déduire pour le point L ?

4) Sur le dessin ci-dessus, construire les points K et L puis la section du cube ABCDEFGH par le plan (HMN).

TSpé   CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N°5

Exercice 1:

Affirmation 1 : L'équation $(3\ln x - 5)(e^x + 4) = 0$ admet exactement deux solutions réelles.

Ensemble de définition : $D =]0\,;+\infty[$

Résolution de l'équation : Un produit est nul si l'un des facteurs est nul donc

$(3\ln x - 5)(e^x + 4) = 0 \iff 3\ln x - 5 = 0$ ou $e^x + 4 = 0$

$\iff \ln x = \dfrac{5}{3}$ ou $e^x = -4$

$\iff x = e^{\frac{5}{3}}$ ou pas de solution

$e^{\frac{5}{3}} \in D$ donc $S = \{ e^{\frac{5}{3}} \}$

Affirmation fausse.

Affirmation 2 : La fonction $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x-2}{4-x}\right)$ est définie sur $]4\,;+\infty[$.

f est de la forme $\ln(u(x))$. Il faut donc que $u(x)$ soit strictement positif.

Signe de $3x - 2$: $3x - 2 \geq 0 \iff x \geq \dfrac{2}{3}$ Signe de $4 - x$: $4 - x \geq 0 \iff x \leq 4$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		4		$+\infty$
signes de $3x-2$		$-$	0	$+$		$+$ signe de m	
signes de $4-x$		$+$		$+$	0	$-$ signe de m	
Signes de $\left(\dfrac{3x-2}{4-x}\right)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

Donc $D_f = \left]\dfrac{2}{3}\,;4\right[$ **Affirmation fausse.**

Affirmation 3 : La dérivée de la fonction f définie à l'affirmation 2 est $f'(x) = \dfrac{10}{(4-x)(3x-2)}$

f est de la forme $\ln(u(x))$ donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

$u(x) = \dfrac{3x-2}{4-x}$ donc $u'(x) = \dfrac{3(4-x)-(-1)(3x-2)}{(4-x)^2} = \dfrac{10}{(4-x)^2}$

donc $f'(x) = \dfrac{\dfrac{10}{(4-x)^2}}{\dfrac{3x-2}{4-x}} = \dfrac{10}{(4-x)^2} \times \dfrac{4-x}{3x-2} = \dfrac{10}{(4-x)(3x-2)}$

Affirmation vraie.

Affirmation 4 : L'inéquation $\ln(2x-1) + \ln 2 \geq \ln 8$ n'a pas de solution.

Ensemble de définition : $2x - 1 > 0 \iff x > \dfrac{1}{2}$ $D = \left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

Résolution de l'inéquation :

$\ln(2x-1) + \ln 2 \geq \ln 8 \iff \ln(2x-1) \geq \ln 8 - \ln 2 \iff \ln(2x-1) \geq \ln 4$

$\iff 2x - 1 \geq 4$

$\iff x \geq \dfrac{5}{2}$

$S = \left[\dfrac{5}{2}\,;+\infty\right[$

Affirmation fausse.

Exercice 2: Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{5x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{5}x = +\infty$

2) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 - 7x - 5}{x - 2}$

$\lim_{x\to 2^-} x^2 - 7x - 5 = -15$ et $\lim_{x\to 2^-} x - 2 = 0^-$ car $x < 2 \Leftrightarrow x - 2 < 0$

donc par quotient $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 - 7x - 5}{x - 2} = +\infty$

3) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x + \sin(x)}{x^2 + 4}$

$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 3x - 1 \leq 3x + \sin x \leq 3x + 1$

$\Leftrightarrow \frac{3x - 1}{x^2 + 4} \leq \frac{3x + \sin(x)}{x^2 + 4} \leq \frac{3x + 1}{x^2 + 4}$ car $x^2 + 4 > 0$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x - 1}{x^2 + 4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x + 1}{x^2 + 4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x} = 0$

donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x + \sin(x)}{x^2 + 4} = 0$

4) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2xe^x - e^x}{e^{2x} - 3}$

$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ (limite de référence) donc $\lim_{x\to-\infty} 2xe^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} -e^x = 0$

donc par somme $\lim_{x\to-\infty} 2xe^x - e^x = 0$

$\lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ et $\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc par composition $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$

donc $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} - 3 = -3.$

donc par quotient $\lim_{x\to-\infty} \frac{2xe^x - e^x}{e^{2x} - 3} = 0$

5) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} \times \frac{\ln x}{x^2}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ (limite de référence) et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

donc par produit $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{2x^2} = 0$

6) $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x + 1}{x - 2}\right)$ Posons $X = \frac{x + 1}{x - 2}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + 1}{x - 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$ et $\lim_{X\to 1} \ln X = \ln 1 = 0$

donc par composition $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x + 1}{x - 2}\right) = 0$

Exercice 3 :

On donne la fonction f définie sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3\ln(2x-1)$

1) Calculer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.

En $+\infty$: Posons $X = 2x-1$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1 = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$

donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(2x-1) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln(2x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 4x = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc par somme $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

En $\frac{1}{2}$ par valeurs supérieures :

$x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x-1 > 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0{,}5^+} 2x-1 = 0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0^+} \ln X = -\infty$ donc par composition

$\lim\limits_{x\to 0{,}5^+} \ln(2x-1) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0{,}5^+} 3\ln(2x-1) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0{,}5^+} x^2 - 4x = -1{,}75$ donc par somme $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0{,}5^+} f(x) = -\infty}$

2) Montrer que $f'(x) = \dfrac{4x^2 - 10x + 10}{2x-1}$.

$$f'(x) = 2x - 4 + 3\times\frac{2}{2x-1} = \frac{(2x-4)(2x-1)+6}{2x-1} = \frac{4x^2 - 2x - 8x + 4 + 6}{2x-1} = \boldsymbol{\frac{4x^2 - 10x + 10}{2x-1}}$$

3) Etudier les variations de la fonction f sur $]\frac{1}{2}\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations.

$2x-1 > 0$ sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$ donc $f'(x)$ est du signe de $4x^2 - 10x + 10$.

$\Delta = 100 - 160 = -60$ donc $4x^2 - 10x + 10$ est du signe de a donc strictement positif sur $\mathbb{R}$.

$f'(x)$ est donc strictement positive sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$ donc **f est strictement croissante sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$** .

x	$\frac{1}{2}$	α	$+\infty$
signes de $f'(x)$	||	+	
variations de f	|| $-\infty$	0	$+\infty$

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$.

Sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$, la fonction f est définie, continue (car dérivable) et strictement croissante.

$\lim\limits_{x\to 0{,}5^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $0 \in\ ]-\infty\,;+\infty[$

Donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un unique α dans $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$

tel que $f(\alpha) = 0$.

5) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près. D'après la calculette $\boldsymbol{\alpha \approx 2{,}3}$

6) En déduire le signe de la fonction f sur $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

La fonction f étant strictement croissante sur $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ on a :

$f(x) < 0$ sur $\left]\frac{1}{2} ; \alpha\right[$; $f(x) > 0$ sur $]\alpha ; +\infty[$ et $f(x) = 0$ si $x = \alpha$

7) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

Equation de la tangente en 1 : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ $\quad f(1) = -3$ et $f'(1) = 4$

$y = 4(x-1) - 3 \Leftrightarrow$ **$y = 4x - 7$**

8) Montrer que $f''(x) = \dfrac{2(4x^2 - 4x - 5)}{(2x-1)^2}$ et étudier la convexité de la fonction f sur $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

$f'(x) = \dfrac{4x^2 - 10x + 10}{2x - 1}$ $\qquad u(x) = 4x^2 - 10x + 10$ et $v(x) = 2x - 1$

$u'(x) = 8x - 10$ et $v'(x) = 2$

$$f''(x) = \frac{(8x-10)(2x-1) - 2(4x^2 - 10x + 10)}{(2x-1)^2} = \frac{16x^2 - 8x - 20x + 10 - 8x^2 + 20x - 20}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{8x^2 - 8x - 10}{(2x-1)^2}$$

$$= \mathbf{\frac{2(4x^2 - 4x - 5)}{(2x-1)^2}}$$

$(2x-1)^2 > 0$ et $2 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $4x^2 - 4x - 5$.

$\Delta = 16 + 80 = 96$

$x_1 = \dfrac{4 - \sqrt{96}}{8} = \dfrac{1 - \sqrt{6}}{2} \approx -0{,}72$ et $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{6}}{2} \approx 1{,}72$

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
signes de $f''(x)$	||	–	0	+ signe de a	

Donc f est concave sur $\left]\frac{1}{2} ; \frac{1+\sqrt{6}}{2}\right]$ et convexe sur $\left[\frac{1+\sqrt{6}}{2} ; +\infty\right[$.

La courbe de f présente au point d'abscisse $\dfrac{1+\sqrt{6}}{2}$ un point d'inflexion.

Exercice 4:

Dans le cube ABCDEFGH, on a placé les points M et N milieux respectifs des segments [AB] et [BC].
On se place dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE}$).

1) Donner sans justification, les coordonnées des points H, M et N.

H (0 ; 1 ; 1) ; M ($\frac{1}{2}$; 0 ; 0) et N (1 ; $\frac{1}{2}$; 0)

2) On admet que les droites (CD) et (MN) sont sécantes et on note K leur point d'intersection.

a) Donner une représentation paramétrique des droites (MN) et (CD).

La droite (MN) passe par M ($\frac{1}{2}$; 0 ; 0) et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{MN}$ ($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 0)

donc **(MN) :** $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$

La droite (CD) passe par D (0 ; 1 ; 0) et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{CD}$ (1 ; 0 ; 0)

donc **(CD) :** $\begin{cases} x = s \\ y = 1 \qquad s \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$

b) Déterminer les coordonnées du point K.
Les coordonnées de K vérifient les deux systèmes d'équations paramétriques donc on a :

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ 1 = \frac{1}{2}t \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{3}{2} \\ t = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$ donc **K($\frac{3}{2}$; 1 ; 0)**

3) On admet que les points H, M et N définissent un plan nommé (HMN)
et que la droite (CG) est sécante à ce plan.

a) Montrer que le point L(1 ; 1 ; $\frac{1}{3}$) appartient à la droite (CG).

G(1 ; 1 ; 1) et C(1 ; 1 ; 0) donc $\overrightarrow{CG}$ (0 ; 0 ; 1) et $\overrightarrow{CL}$(0 ; 0 ; $\frac{1}{3}$)

donc $\overrightarrow{CL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CG}$ donc $\overrightarrow{CL}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont colinéaires donc les points C,L et G sont alignés.

Le point L appartient donc à la droite (CG).

b) Montrer que $\overrightarrow{ML} = \frac{4}{3}\overrightarrow{MN} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MH}$

$\overrightarrow{ML}$ ($\frac{1}{2}$; 1 ; $\frac{1}{3}$) $\overrightarrow{MN}$ ($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 0) donc $\frac{4}{3}\overrightarrow{MN}$ ($\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$; 0)

$\overrightarrow{MH}$ ($-\frac{1}{2}$; 1 ; 1) donc $\frac{1}{3}\overrightarrow{MH}$ ($-\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$)

donc $\frac{4}{3}\overrightarrow{MN} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MH}$ ($\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$; $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$; $0 + \frac{1}{3}$)

donc **$\frac{4}{3}\overrightarrow{MN} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MH}$ ($\frac{1}{2}$; 1 ; $\frac{1}{3}$)**

c) Que peut-on en déduire pour le point L ?

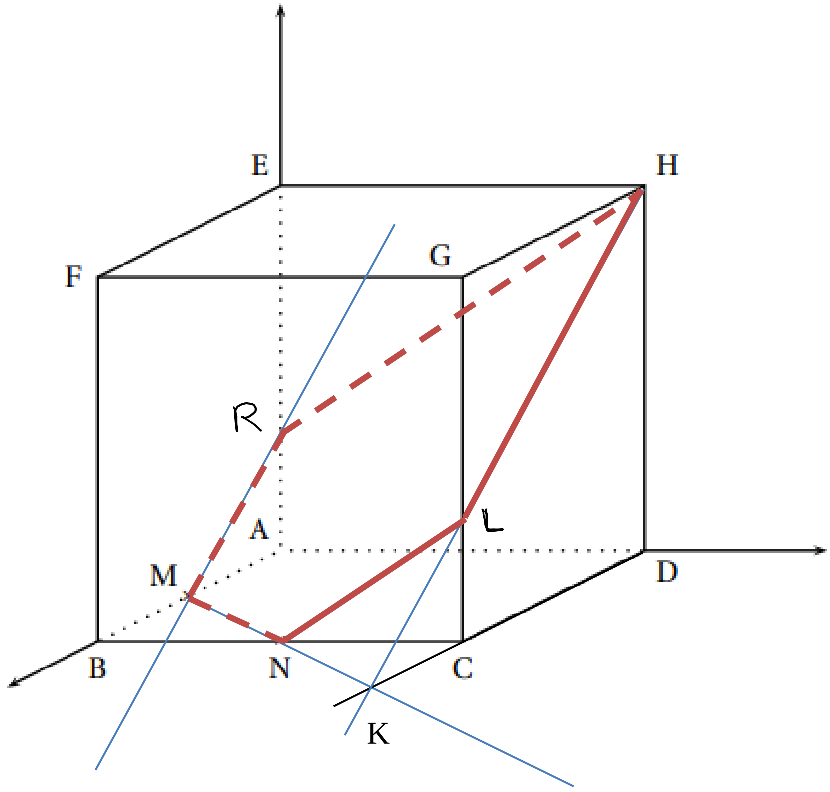
Le vecteur $\overrightarrow{ML}$ peut s'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MH}$

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MH}$ sont des vecteurs non nuls et non colinéaires de façon évidente donc ce sont des vecteurs directeurs du plan (MNH).

Le point L appartient donc au plan (MNH).

L est donc le point d'intersection de la droite (CG) avec le plan (MNH).

4) Sur le dessin ci-dessus, construire les points K et L puis la section du cube ABCDEFGH par le plan (HMN).



Le segment [MN] est l'intersection du plan (HMN) et de la face ABCD.
Les droites (MN) et (CD) se coupe en K donc K $\in$ (MNH).
La droite (KH) coupe (GC) en L.
Les plans (HDC) et (FAB) sont parallèles donc les droites d'intersection de ces plans avec le plan (MNH) sont parallèles. Il faut donc tracer la parallèle à (HL) passant par M. Cette droite coupe (AE) en R. Il ne reste plus qu'à tracer [RH] et [NL] pour obtenir la section cherchée.